

**ЖЕР ЖАНА СЕЛЬ АГЫМДАРЫНЫН КЫЙМЫЛЫН ТАЛДОО УЧУН МОДЕЛЬ
МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ И СЕЛЕВЫХ ПОТОКОВ
A MODEL FOR THE ANALYSIS OF MOBILE MOVEMENT AND SEALING FLUIDS**

Мекенбаев Б.Т. Международный Университет Инновационных Технологий,
Mekenbaev B.T. IntUIT, mekenbt@mail.ru.
International University of Innovative Technologies

Дуйшеналиев Ч.Т. компания «Sky Mobile»,
Duishenaliyev Ch.T. company «Sky Mobile», choga.mizuno@mail.ru

Асан у. Э. МУИТ; Asan uulu Erlan, IntUIT
Мекенбаева Ж.Б. КГУСТА им. Н.Исанова

Mekenbaeva J. B. Кыргызский Государственный Университет Строительства Транспорта
и Архитектуры им. Н. Исанова,
Mekenbaeva J.B. Kyrgyz State University of Transport and Architecture named after N. Isanov,
jany.page@mail.ru

***Аннотация.** Майда суулар тендемелеринин негизинде суюктуктардын агымын моделдөө үчүн айырма схемалары түзүлдү. Майда суулар тендемелерин автомоделдик чыгаруунун негизинде суюктуктун агымын эсептөө үчүн сандык ыкма түзүлгөн жана изилденген. Ыкманын иштөө мүмкүнчүлүгү сандык чыгарылыштары бир өлчөмдүү майда суулар маселелеринин аналитикалык чырылыштары менен салыштырылат.*

***Ачык сөздөр:** агым; майда суулар тендемелери; автомоделдик чыгаруу.*

***Аннотация.** Построены разностные схемы для моделирования течений жидкости в рамках уравнений теории мелкой воды. На основе автомоделного решения уравнений мелкой воды построен и исследован численный метод расчета течений жидкости. Работоспособность методики иллюстрируется путем сравнения численных прогнозов с аналитическими решениями одномерных задач мелкой воды.*

***Ключевые слова:** поток; уравнения мелкой воды; автомоделное решение.*

***Abstract.** Difference schemes for modeling fluid flows in the framework of the theory of shallow water are constructed. Based on the self-similar solution of shallow water equations, a numerical method for calculating fluid flows has been constructed and investigated. The efficiency of the technique is illustrated by comparing numerical predictions with analytical solutions of one-dimensional shallow water problems.*

Keywords: flow; shallow water equations; self-similar solution.

Введение. Основную долю стихийны бедствий, происходящих в Кыргызской Республике, составляют происшествия природно-климатического характера. Геологические, климатические угрозы и проблемы, вызванные глобальным изменением климата, оказывают свое негативное воздействие. В результате стихийных бедствий страдает экономика страны, так как при этом разрушаются производственные предприятия, уничтожаются материальные ценности, гибнут люди. Кроме того, стихийные бедствия создают неблагоприятные условия для жизни населения, вызывая вспышки опасных инфекционных заболеваний. Количество людей, пострадавших от стихийных бедствий может быть значительным, а характер поражений очень разнообразным.

В этой связи, подготовленность населения и защищенность окружающей среды на случай чрезвычайных ситуаций позволяют минимизировать как экономические издержки и человеческие жертвы, так и их негативное воздействие на природу. Эти мероприятия потребуют масштабных экспериментальных наблюдений и полевых исследований. Сложность и трудоемкость таких исследований повышают роль и значимость математических моделей, которые становятся перспективной альтернативой полевым

наблюдениям и физическим экспериментам. Моделирование движения и прогнозирование эволюции грунтовых потоков является актуальной и практически значимой задачей.

1. Основные уравнения. В настоящей работе рассматривается плоскопараллельное течение потока жидкости, позволяющее ограничиться изучением одномерной нестационарной задачи. Для моделирования движения потока жидкости в качестве исходной взята модель уравнений однослойной мелкой воды, учитывающая турбулентное трение о дно, которая также использует осредненное по слою значение скорости. Приближение мелкой воды заключается в замене уравнения импульса, для вертикальной составляющей вектора количества движения, уравнением гидростатики [1, 2].

Поток жидкости, предполагается однородной и несжимаемой, движение турбулентно. Трение входит в уравнения интегрально, в виде трения о дно. Поток взаимодействует с внешней средой только на дне. Взаимодействием свободной поверхности потока с внешней средой пренебрегаем.

Соответствующие математические модели представляют собой начальные (начально-краевые) задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа. Моделируется распространение потока жидкости, которая описывается системой уравнения неразрывности и динамическим уравнением на основе закона сохранения импульса [3,4]

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где u -скорость потока, g -ускорение свободного падения, h - уровень жидкости над дном канала.

В работе [5] показано, что, принимая следующее подстановки

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial(hu)}{\partial x}, \\ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

из системы уравнений непрерывности и закона сохранения импульса (1), можно получить систему в форме характеристического уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Считая скорость и высоту потока в рассматриваемом интервале ($x_L \leq x \leq x_R$) непрерывными функциями, проинтегрируем второе уравнение системы (1) в фиксированный момент времени ($t=t^*$) получим следующее выражение

$$\int_{x_L}^{x_R} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{u_R^2 - u_L^2}{2} + g(h_R - h_L) = 0. \quad (4)$$

Второе уравнение системы (3) преобразав к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x},$$

подставляем в (4) и, после преобразования, имеем

$$\int_{x_L}^{x_R} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{u_R^2 - u_L^2}{2} + g(h_R - h_L). \quad (5)$$

Теперь функцию скорости в фиксированный момент времени ($t = t_*$) на интервале $x_R \leq x \leq x_L$ представим в виде параболы, проходящей через точки $u_L = u(x_L, t)$, $u_* = u(x_*, t)$ и $u_R = u(x_R, t)$ (рис.1). Функцию $\varepsilon(x, t)$ также представим в виде параболы на заданном интервале, проходящей соответственно через точки $\varepsilon_L = \varepsilon(x_L, t)$, $\varepsilon_* = \varepsilon(x_*, t)$ и $\varepsilon_R = \varepsilon(x_R, t)$.

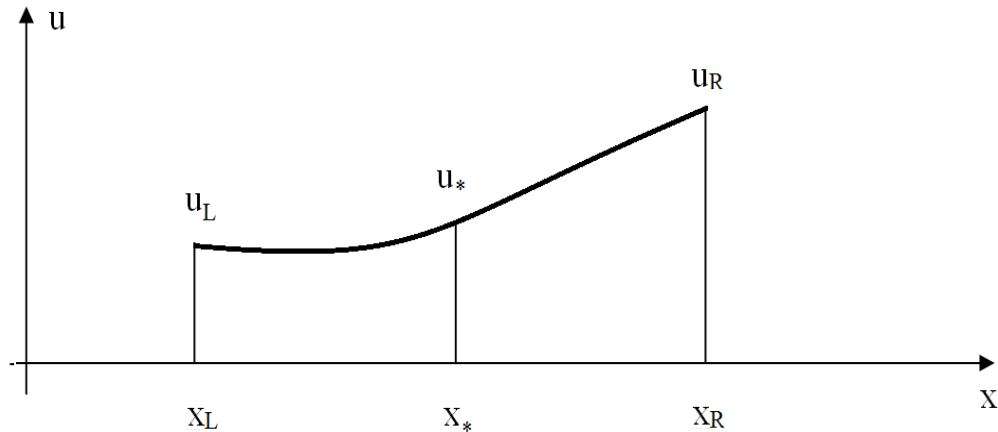


Рис. 1. Аппроксимация функции скоростей параболой

Тогда производная функции скорости будет линейной функцией в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_* - u_L}{(x_* - x_L)^2} (x_* - x_L) + \frac{u_R - u_*}{(x_R - x_*)^2} (x_R - x_*). \quad (6)$$

Для нахождения интеграла $\int_{x_L}^{x_R} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} dx$, где подынтегральная функция $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$ имеет

параболическую форму, а $\frac{\partial u}{\partial x}$ - прямая линия, используем всем известное [6] правило

Симпсона умножения эпюры моментов

$$\int_{x_L}^{x_R} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{u_R - u_L}{6} (\varepsilon_R + 4\varepsilon_* + \varepsilon_L). \quad (7)$$

Интеграл (5), с учетом (7), будет иметь следующий вид

$$\frac{u_R - u_L}{6} (\varepsilon_R + 4\varepsilon_* + \varepsilon_L) = \frac{u_R^2 - u_L^2}{2} + g(h_R - h_L). \quad (8)$$

По правилу Симпсона интеграл функции равен площади фигуры, ограниченной сверху кривой подынтегральной функции, а снизу - осью OX, т.е.

$$S = \int_{x_L}^{x_R} \varepsilon dx = \frac{x_R - x_L}{6} (\varepsilon_R + 4\varepsilon_* + \varepsilon_L).$$

Принимая во внимание теорему о среднем значении интеграла [7]

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{x_R - x_L} \int_{x_L}^{x_R} \varepsilon dx = \frac{1}{6} (\varepsilon_R + 4\varepsilon_* + \varepsilon_L),$$

уравнение (8) можно представить в виде

$$\bar{\varepsilon}(u_R - u_L) = \frac{u_R^2 - u_L^2}{2} + g(h_R - h_L). \quad (9)$$

Здесь $\bar{\varepsilon}$ - среднее значение функции $\varepsilon(x, t)$ на интервале $x_R \leq x \leq x_L$.

Если левая часть выражения (9) равна нулю, т.е.

$$0 = \frac{u_R^2 - u_L^2}{2} + g(h_R - h_L),$$

получим уравнение Бернулли для стационарного течения.

Первое уравнение системы (2) преобразав к виду

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}$$

и, подставляя в уравнение неразрывности, после интегрирования получим

$$-\int_{x_L}^{x_R} \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} dx + h_R u_R - h_L u_L = 0.$$

Производя аналогичные преобразования над последним выражением, окончательно получим

$$\bar{\varepsilon}(h_R - h_L) = h_R u_R - h_L u_L.$$

Выражения для ускорения потока представим в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = (u - \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x},$$

или

$$(u - \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (10)$$

Используя известное [5] выражение

$$h = g(u - \varepsilon)^2$$

преобразуем (10) к виду

$$\pm c \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Проинтегрировав последнее выражение, получим

$$\pm \bar{c}(u_R - u_L) = -g(h_R - h_L). \quad (11)$$

Здесь \bar{c} - среднее значение скорости распространения звука на рассматриваемом интервале. Последняя формула напоминает повышение давления при гидроударе [8,11].

Выражение (11) подставляем в (9) получим

$$\bar{\varepsilon}(u_R - u_L) = \frac{u_R^2 - u_L^2}{2} \mp \bar{c}(u_R - u_L).$$

После сокращения обеих частей на $u_R - u_L$, последнее преобразуется к виду

$$\bar{\varepsilon} = \frac{u_R + u_L}{2} \mp \bar{c}. \quad (12)$$

Сравнивая последнее с (10) можно получить выражение для среднего значения скорости на заданном интервале

$$\bar{u} = \frac{u_R + u_L}{2}.$$

Теперь, подставляя последнее выражение в (12), получим

$$\bar{\varepsilon} = \bar{u} \pm \bar{c}$$

2. Численная реализация. Теперь изменение высоты потока можно представить в виде

$$\int_{x_L}^{x_R} \frac{\partial h}{\partial t} dx \approx \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x = -\bar{\varepsilon}(h_R - h_L)$$

или

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx -\frac{\bar{\varepsilon}(h_R - h_L)}{\Delta x}.$$

Здесь $\Delta x = x_R - x_L$.

Аналогично можно получить выражение и для скорости

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx -\frac{\bar{\varepsilon}(u_R - u_L)}{\Delta x}.$$

Полные производные высоты и скорости потока определяются формулами

$$\frac{dh}{dt} \approx \frac{\bar{c}(h_R - h_L)}{\Delta x}, \quad (13)$$

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{\bar{c}(u_R - u_L)}{\Delta x}. \quad (14)$$

В начальный момент времени воспользуемся выражениями для определения производных функций высоты потока и скорости

$$\begin{aligned} \frac{(h_R - h_L)_i^0}{\ell_i^0} &= \frac{(h_{i+1}^0 - h_{i-1}^0)}{x_{i+1}^0 - x_{i-1}^0}, \\ \frac{(u_R - u_L)_i^0}{\ell_i^0} &= \frac{(u_{i+1}^0 - u_{i-1}^0)}{x_{i+1}^0 - x_{i-1}^0}, \\ \bar{c}_i^0 &= \sqrt{gh_i^0}. \end{aligned}$$

Здесь ℓ_i, x_i — длина и координаты центра частицы соответственно.

Далее принимаем [12], что $x_{i+1} - x_{i-1} \approx 2\ell_i$.

Подставляя (13) и (14) в систему уравнений (1), получим

$$\begin{aligned} \bar{c}_i^t (u_R - u_L)_i^{t+\Delta t} &= -g(h_R - h_L)_i^t, \\ \bar{c}_i^t (h_R - h_L)_i^{t+\Delta t} &= -h_i^t (u_R - u_L)_i^{t+\Delta t}. \end{aligned}$$

Ускорение частицы определяется из (14)

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_i^{t+\Delta t} = \bar{c}_i^t \frac{(u_R - u_L)_i^{t+\Delta t}}{2\ell_i^t}.$$

Откуда, в момент времени t определим значение скорости в следующий момент времени $t+\Delta t$

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \bar{c}_i^t \frac{(u_R - u_L)_i^{t+\Delta t}}{2\ell_i^t} \Delta t.$$

Производную мощности потока представим в виде

$$\left(\frac{dh}{dt} \right)_i^{t+\Delta t} = \bar{c}_i^t \frac{(h_R - h_L)_i^{t+\Delta t}}{2\ell_i^t}.$$

Отсюда можно найти

$$h_i^{t+\Delta t} = h_i^t + \bar{c}_i^t \frac{(h_R - h_L)_i^{t+\Delta t}}{2\ell_i} \Delta t.$$

Далее определим $\bar{c}_i^{t+\Delta t} = \sqrt{gh_i^{t+\Delta t}}$.

3. Вычислительный эксперимент. Для проведения вычислительных экспериментов предложенный алгоритм был реализован в специально разработанной программе, рассчитанной на использование персонального компьютера.

Для иллюстрации работы алгоритма рассмотрим классическую задачу о разрушении плотины [10]. Канал постоянного поперечного сечения, простирающийся до бесконечности в обе стороны, имеет тонкую перегородку в сечении $x = 0$. При $x < 0$ вода имеет глубину $h = h_0$, а при $x > 0$, $h = 0$ (см. рис. 2).

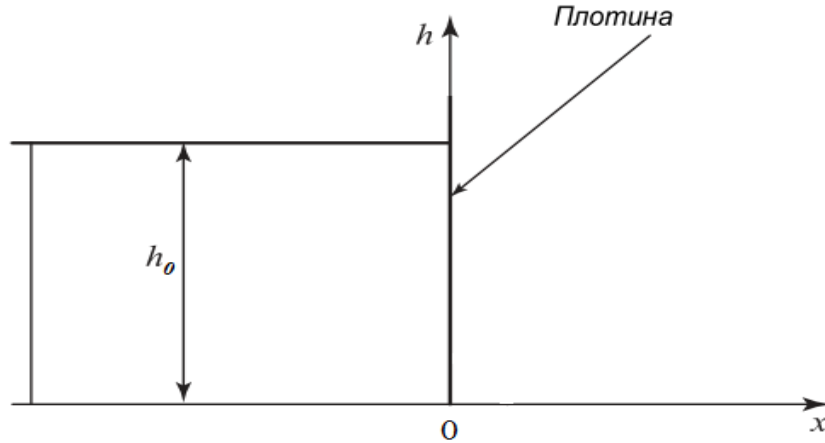


Рис.2. Задача о разрушении плотины.

Вода вначале покоится и в момент времени $t=0$ плотина внезапно убирается. Начальные условия задачи [10]:

$$u(x, 0) = u_0 = 0, \quad x \in]-\infty; \infty[$$

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_0, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

При $\varepsilon = x/t \leq 0$, $u = u_0 = 0$ и $h = h_0$ данная задача имеет решение следующего вида

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right), \\ h &= \frac{1}{9g} \left(2c_0 - \frac{x}{t} \right)^2. \end{aligned} \tag{15}$$

где $c_0 = \sqrt{gh_0}$.

В начальный момент времени расчетная область по x ($0 < x < L$, L -длина области) разбивается на большое число конечных частиц (рис.3).

С математической точки зрения метод основан на представлении тела совокупностью взаимодействующих частиц-прямоугольников (материальных точек или твердых тел), описываемых законами классической механики. Выбранный метод дискретизации трансформирует уравнения модели. Вводим набор частиц с координатами $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ (рис. 3).

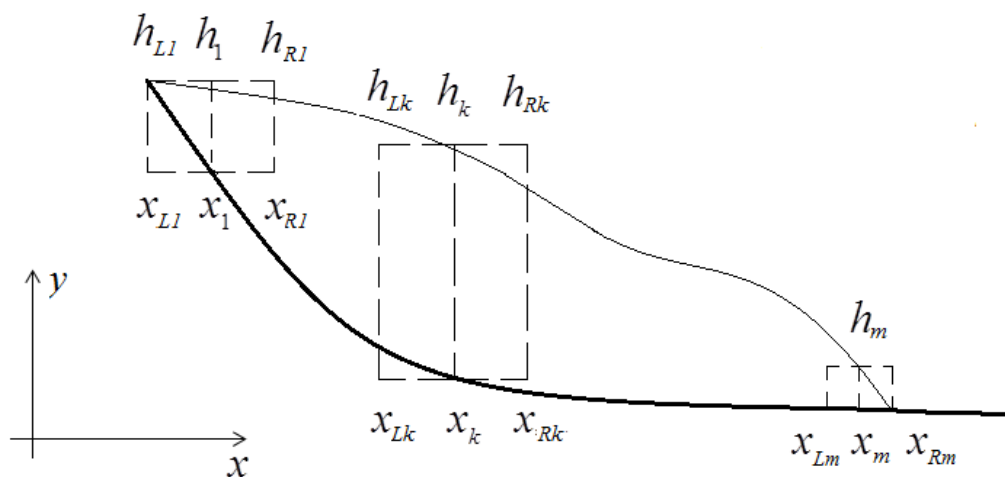
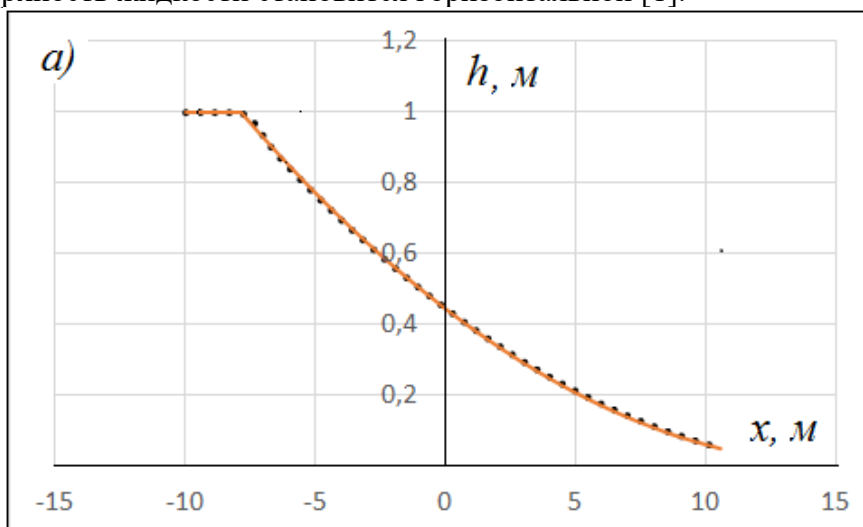


Рис.3. Аппроксимация тела потока частицами-прямоугольниками.

Полагаем, что скорости и отметки свободной поверхности $y = h$ в пределах каждой частицы являются кусочно-постоянными [1, 2, 4].

Важным моментом является тот факт, что частицы-прямоугольники соприкасаются друг с другом (они не перекрывают друг друга и не образуют пустот между собой). Также соблюдается принцип сохранения симметрии частиц и середины основания прямоугольников являются координатами частиц [1,2,4,9].

Решения задачи о разрушении плотины, полученные аналитическим способом и предложенным методом, представлены на рис. 4. Как видим, функция $h(x)$ в точке $x=0$, терпит разрыв [1]. При $t>0$ этот разрыв мгновенно сглаживается, а поверхность части жидкости, находящейся в движении, принимает форму параболы, касающейся оси x (т.е. дна) в точке $x = 2cot$. Указанная парабола проходит от фронта волны до точки $x = -cot$, после которой поверхность жидкости становится горизонтальной [1].



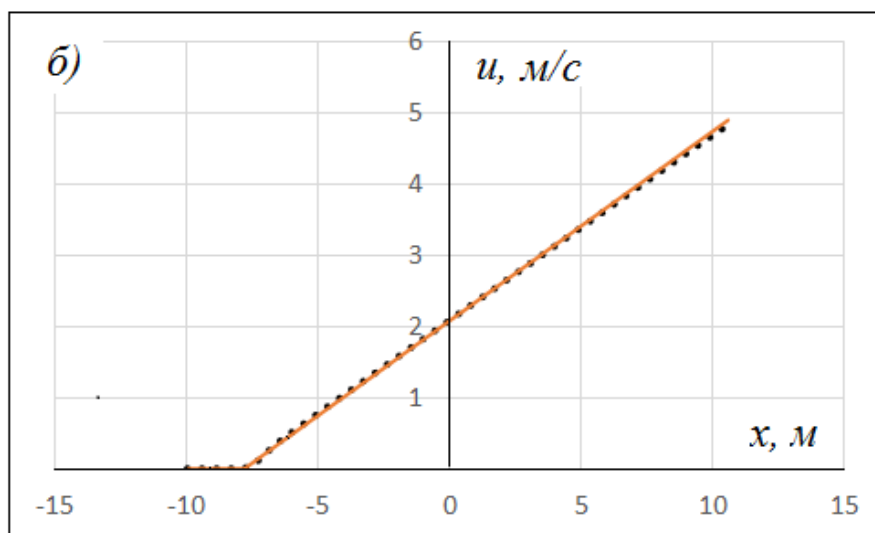
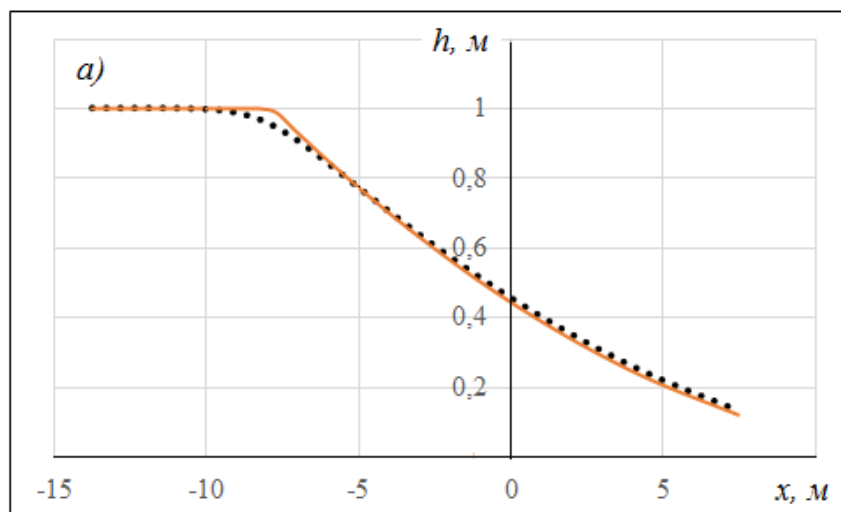


Рис. 4. Решение задачи о прорыве плотины при $h_0=1$. Плотина находится в точке $x = 0$. а)-график изменения высоты потока, б)- график изменения скорости частиц потока, ширина частицы-0,1 м.

Точками на графиках изображены значения скоростей частиц u , прямоугольниками – частицы, отвечающие за уровень жидкости h . Сплошные линии на рис. 4 – решение, полученное аналитическим способом (15). Плотина находится в точке с координатой $x = 0$. Сравнение результатов, полученных предложенным методом, показывает хорошее совпадение с аналитическими решениями задачи. Расстояние между частицами в начальный момент времени равно $\Delta=0,1$. На рис. 4 показано решение с шагом $\Delta t = 0,01$ при $t=2,5$ с.

В рис.5 даны графики изменения высоты и скорости потока при ширине частицы $\Delta=0,5$ м., с шагом изменения времени $\Delta t = 0,01$ при $t=2,5$ с.



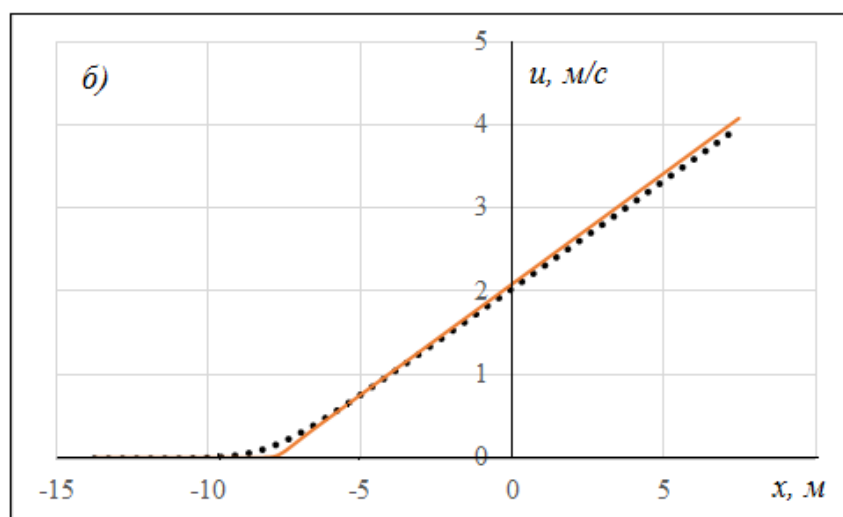


Рис. 5. Решение задачи о прорыве плотины при $h_0=1$. Плотина находится в точке $x = 0$ а) – график изменение высоты потока, б)– изменение скорости частиц потока, при ширине частицы-0,5 м.

Литература

1. Богомолов С.В. Математическое моделирование движения оползня-потока методом частиц [Текст] / С.В. Богомолов, Е.В. Захаров, С.В. Зеркаль // Труды X Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ-2001)». – Херсон, 2001. –С. 69-71.
2. Сарбалиев А.Ш. Моделирование движения грунтового потока при строительстве плотины взрывообвальным методом (на примере плотины Камбаратинской ГЭС-1).[Текст]: автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук: 01.02.04 / А.Ш. Сарбалиев. – Бишкек, 2012. -22 с.
3. Эглит М.Э. Неустановившиеся движения в руслах и на склонах [Текст] / М.Э. Эглит - М.: изд-во Моск. ун-та, 1986. -96 с.
4. Дуйшеналиев Т.Б. Моделирование движение грунтовых потоков на наклонных поверхностях [Текст] / Т.Б. Дуйшеналиев, Б.Т. Мекенбаев, С.Б. Барсанаев, А.Ш. Сарбалиев // Известия КГТУ им.И.Раззакова. Бишкек 2009г., №17. Стр. 374-376.
5. Дуйшеналиев Т.Б. Автомодельное решение уравнения мелкой воды [Текст] / Т.Б. Дуйшеналиев, Б.Т. Мекенбаев, Ш. Макеева // Наука, новые технологии Кыргызстана. - Бишкек, 2015.- №4. – С. 26-27.
6. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. - Киев, Наукова думка, 1988г.,-736 с.
7. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г.Корн, Т.Корн. – Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. М.: 1970. - 832 с.
8. А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. Курс физики [Текст]: Учебное пособие. В 3-х т. Т. 3 / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. - 3 изд., переаб. и доп. - М.: Высшая школа, 1979. - 511 с.
9. Wang Xiaobo. A model for geotechnical analysis of flow slides and debris flows [Текст] / Xiaobo Wang, Norbert R. Morgenstern, and Dave H. Chan // Can. Geotech. J. Vol. 47, 2010. 1401–1414. doi:10.1139/T10-039.
10. Рыскин Н.М. Нелинейные волны [Текст]: Учеб. пособие для вузов / Н.М. Рыскин, Д. И. Трубецков. -.М.: Наука. Физматлит, 2000.-272 с. (Сер. Современная теория колебаний и волн). - ISBN 5- 02- 15553- 5.
11. Штеренлихт Д. В. Гидравлика [Текст]: Учебник для вузов / Д. В. Штеренлихт. - М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640.

12. Tai C.Y.C. Capturing and Front-Tracking Methods for Granular Avalanches [Текст] / C.Y.C. Tai, S. Noelle, J.M.N.T. Gray & K. Hutter // Journal of Computational Physics 175, 269–301 (2002) doi:10.1006/jcph.2001.6946.