УДК 699.841:624.012.4

КОЛЕБАНИЯ КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ
OSCILLATIONS OF FRAME BUILDINGS IN SEISMIC EXPOSURE

Булгакова М., **Нурмухамбетов Д.**
Bulgakova M., Nurmuhambetov D.

Научные руководители: к.т.н., профессор **Бубнович Э. В. Bubnovich E.B.**
ст.преп.**Тулеушова Р. Ж.**, Tuleushova R.J.
Каспийский университет
Caspian University
, (г.Алматы, РК)

Сейсмикалык иш-чарага эркиндиктин бир даражасы менен системасы катары каралат сызыктуу термелүүлөрдүн имараттар, туруктуу кокустук жараянын моделдештирилген.

Исследуется нелинейные колебания зданий, рассматриваемых как система с одной степенью свободы при сейсмическом воздействии, моделируемом стационарным случайным процессом. Библиогр. 2назв.

Nonlinear oscillations of buildings considered as a system with one degree of freedom under seismic action, modeled by a stationary random process, are investigated.

Ключевые слова: *колебания; сейсмика; нелинейная система; воздействия; интенсивность.*

Key words: *oscillations; seismic; non-linear system; impact; intensity.*

Поскольку точных математических методов исследования нелинейных систем при случайных возмущениях пока не существует, мы воспользуемся одним из приближенных методов – стохастическим, основанным на использовании марковских процессов. Реальное внешнее воздействие заменяется эквивалентным дельта-коррелированным процессом с последующим использованием уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. Преимущество этого метода заключаются в том, что оно дает возможность вычислить функцию распределения искомой величины; при этом реальное внешнее воздействие заменяется эквивалентным дельта-коррелированным.

Считается, что время корреляции внешнего воздействия ($\tau_{\text{кор}}$) значительно меньше времени релаксации ($\text{T}_{\text{рел}}$) амплитуды и фазы процесса на выходе системы, т.е. $\tau_{\text{кор}} \ll \text{T}_{\text{рел}}$. Для реальных зданий и сооружений это условие, как правило, выполняется. Дифференциальное уравнение колебаний здания с учетом затухания имеет вид [1]

$$\ddot{f}"(t) + k\dot{f}(t) + \omega^2 f(t) + \gamma f^3(t) = VF \qquad (1)$$

где k ,ω^2, γ – коэффициенты, зависящие от затухания и параметров системы; V– интенсивность случайного процесса; F(t) –эргодический стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией:

$$K(\tau) = V_1^2 \lim \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} F(t)\cdot F(t+\tau)dt = V_1^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_F(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega = V_1^2 K_0 \delta(\tau) \qquad (2)$$

В которой $S_F(\omega) = K_0 = const -$ спектральная плотность функцииF(t); $\delta(\tau)$–дельта-функция Дирака; T–продолжительность реализации процесса F(t).Заменим (1) эквивалентной системой:

$$y_1 = y_2,$$

$$y_2 = -ky_2 - \omega^2 y_1 - \gamma y_1^3 + V_1 F(t), \qquad (3)$$

где $y_1 =$ f.

Совместная плотность вероятности Р(y_1, y_2) находится из уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\frac{dP}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dyi}(A_i P) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{d^2}{dy_i y_j}\left(B_{ij}P\right) \quad (4)$$

Здесь A_i, B_{ij} =интенсивностимарковского процесса 1-го и 2-го порядков.

$$A_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{< y_1(t+\Delta t) >}{\Delta t} \quad (5)$$

$$B_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{< \left[y_i(t+\Delta t) - y_j(t)\right]\left[y_j(t+\Delta t) - y_j(t)\right] >}{\Delta t}$$

Угловые скобки в (5) обозначают усреднение по совокупности реализаций. Функции A_iхарактеризуют среднее течение процесса, B_{ij} – дисперсию процесса.
В случае стационарных колебаний имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{dP}{dyi} + \mathrm{P}\sum_{i=1}^{n} \frac{dA_i}{dy_i} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{d^2}{dy_i dy_j}\left(B_{ij}P\right) \quad (6)$$

т.е. стационарным колебаниям здания соответствует уравнение:

$$y_2 \frac{dP}{dy} k \cdot P + (ky_2 + \omega^2 y_1 + \gamma y_1^3)\frac{dP}{dy_2} = \frac{1}{2} V_1^2 K_0 \frac{d^2 P}{dy_2^2} \quad (7)$$

Решая это уравнение, получим, что совместная плотность вероятности обобщенной координаты fи ее скорости fпри стационарных колебаниях имеет вид:

$$P(y_1,\ y_2) = C\,\exp\left\{-\frac{k}{V_1^2 K_0}\left[y_2^2 + 2\int_0^2 (\omega^2 y_1 + \gamma \cdot y_1^3) dy\right]\right\} \quad (8)$$

или после интегрирования имеем:

$$P(y_1,\ y_2) = C\,\exp\left[-\frac{k}{V_1^2 K_0}(y_2^2 + \omega^2 y_1^2 + \frac{1}{2}\gamma \cdot y_1^4)\right] \quad (9)$$

где С- нормировочная постоянная.

Двухмерную функцию распределения Р$(y_1,\ y_2)$ можно представить в виде:

$$\mathrm{P}(y_1, y_2) = P_1(y_1)P(y_2) \quad (10)$$

где $P_1(y_1) = C_1 \exp\left\{-\frac{y_1^2 + \tilde{y} y_1^4}{2\sigma_0^{*2}}\right\} = C_1 \exp\{-u\}$; (11)

$$P_2(y_2) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\{-y_2^2/2\sigma_0^2\} \quad (12)$$

где $\sigma_0^2 = \frac{V_1^2 K_0}{2k}$; $\quad \tilde{y} = \tilde{y} / 2\sigma_0^2$; $\quad \sigma_0^{*2} = \sigma_0^2/\omega^2$ (13)

Постоянная C_1 определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_1 \, \exp\{-(y_1^2 + \tilde{y} y_1^4) \ / \ 2\sigma_0^{*2}\} dy_1 = 1. \quad (14)$$

Выражение (12) представляет собой плотность вероятности нормального распределения; а (11) – плотность вероятности распределения Максвелла-Больцмана.

Считаем, что рассматриваемая система обладает слабой нелинейностью. Это позволяет успешно применять приближенные формулы, основанные на разложении плотности вероятности в ряд Маклорена, либо по полиномам Эрмита.

Воспользовавшись рядом Маклорена из (11) , получаем:

$$P_1(y_1) = C_1\left[i - \frac{1}{2\sigma_0^{*2}}\tilde{y}y_1^4 + \frac{1}{8\sigma_0^{*4}}\tilde{y}y_1^8 - \frac{1}{48\sigma^{*6}}\tilde{y}y_1^{12} + \frac{1}{16\cdot 24\sigma^{*8}}\tilde{y}y_1^{16} - \cdots\right] \exp\left(-\frac{y_1^2}{2\sigma_0^{*2}}\right) \quad (15)$$

В дальнейшем будем ограничиваться двумя первыми членами ряда (15)

$$P_1(y_1) = C_1\left[1 - \frac{1}{2\sigma_0^{*2}}\tilde{y}y_1^4\right]\exp\left(-\frac{y_1^2}{2\sigma_0^{*2}}\right) \quad (16)$$

Подставляя (16) в (14), найдем

$$C_1 = \left[\sigma_0^*\sqrt{2\pi(1 - \frac{2}{3}\tilde{y}\sigma_0^{*2})}\right]^{-1} \quad (17)$$

Таким образом,

$$P_1(y_1) = \left[\sigma_0^*\sqrt{2\pi}(1 - \frac{2}{3}\gamma\sigma_0^{*2})\right]^{-1}\left[1 - \frac{1}{2\sigma_0^{*2}}\tilde{y}y_1^4\right]\cdot\exp(-y_1^2\ /\ \ 2\sigma_0^{*2}) \quad (18)$$

Из (18) видно, что нормальная координата не имеет нормального закона распределения за исключением случая, когда ỹ=0.

Совместная плотность вероятности на основании (18) и (12) будет иметь вид:

$$P(y_1, y_2) = \left[\sigma_0\sigma_0^* 2\pi\left(1 - \frac{3\tilde{y}\sigma_0^{*2}}{2}\right)\right]^{-1}\cdot\left[1 - \frac{1}{2\sigma_0^{*2}}\tilde{y}y_1^4\right] \quad (19)$$

$$\exp(-\ y_1^2/\ 2\ \sigma_0^{*2})\cdot\exp(-y_2^2\ /\ 2\sigma_0^2)$$

Если коэффициентами, характеризующими нелинейность системы, пренебречь, то средний квадрат обобщенный координаты можно вычислить по формуле:

$$< f^2 > = < y^2 > = \frac{1}{\sigma_0^{*2}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y_1^2\exp\left(\frac{-y_1^2}{2\sigma_0^{*2}}\right)\cdot dy_1 = \sigma_0^{*2} = V^2K_0/\ 2k\omega^2 \quad (20)$$

Выражение (19) может быть использовано для определения в единицу времени числа пересечений нулевого уровня v_0^+снизу вверх. По формуле Райса [2] имеем:

$$v_0^+ = \int_0^{\infty} y_2 P(0, y_2)dy_{2.} \quad (21)$$

Подставляя (19) в (21), получим:

$$v_0^+ = \omega\ /\ 2\pi\left[1 - \frac{3}{8}\cdot\frac{\tilde{y}V^2K_0}{k\cdot\omega^2}\right] \quad (22)$$

Последняя зависимость определяет эффективную частоту стационарных нелинейных колебаний здания.

Математическое ожидание числа пересечений снизу вверх уровня $y_1 = d$в единицу времени равно:

$$v_d^+ = \int_0^{\infty} y_2 P(d, y_2)dy_2 \quad (23)$$

Библиографический список

1. Бубнович Э.В., Ивович В.А. Нелинейные колебания каркасных зданий с ядрами жесткости. Алматы 2007.
2. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1981.