О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СКАЛЯРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

С.Б.Тагаева, *КГТУ им. И.Раззакова, Бишкек, КР,* tagaeva_72@mail.ru

Бул жумушта биз эки сызыктуу тендемелердин жапайы ядро жана системалар менен үчүнчү түрдөгү скалярдык сызыктуу Вольтерра ажырагыс тендемелердин спектралдык касиеттерин ачып берген.

В данной работе выявлены спектральные свойства скалярных линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с вырожденным ядром и систем двух линейных уравнений.

In this paper we revealed the spectral properties ofscalarnonlinearVolterraintegralequationsof the third kind with a degenerate kernel and systems of two linear equations.

Рассмотрим скалярное уравнение:

$$tu(t) + \lambda\int_0^t u(s)ds = f(t), t\in\mathcal{R} \qquad (1)$$

где $\lambda\in\mathcal{R}$, $f(t)\in\mathcal{A}_v(\mathcal{R})$,

и система

$$t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t)\end{pmatrix} + \lambda\int_0^t \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(s) \\ v(s)\end{pmatrix}ds = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t)\end{pmatrix}, t\in\mathcal{R}, (2)$$

где $\lambda\in\mathcal{R}$, $f(t)$, $g(t)\in\mathcal{A}_v(\mathcal{R})$, все константы – вещественные числа.

Потребуем выполнения условия$f(0)=0$. (3)

Необходимонайти условия, при которых уравнение (1) и система (2) имеют решения во множестве целых аналитических функций экспоненциального типа с вещественными коффициентами$\mathcal{A}_v(\mathcal{R})$ и$\mathcal{A}_v(\mathcal{R})\times\mathcal{A}_v(\mathcal{R})$, соответственно, то есть представимые в виде рядов:

$$u(t) = u_0 + u_1t + u_2t^2 + \ldots, \qquad (4)$$

$$v(t) = v_0 + v_1t + v_2t^2 + \ldots, \qquad (5)$$

где сходимость – такого же порядка, как для рядов, представляющих функции $f(t)$, $g(t)$. Учитывая условие (3), имеем:

$$f(t) = f_1t + f_2t^2 + \ldots, \qquad (6)$$

$$g(t) = g_1t + g_2t^2 + \ldots \qquad (7)$$

Подставим (4) в (1), получаем:

$t(u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) + \lambda \int_0^t (u_0 + u_1 s + u_2 s^2 + \cdots) ds = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3$ ....

Преобразуем

$$u_0 t + u_1 t^2 + u_2 t^3 + \cdots + \lambda u_0 t + \frac{1}{2}\lambda u_1 t^2 + \frac{1}{3}\lambda u_1 t^3 + \cdots = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 + \cdots.$$

Приравнивая сомножители при одинаковых степенях t, получим:

$u_0 + \lambda u_0 = f_1,$

$u_1 + \frac{1}{2}\lambda u_1 = f_2,$

$u_2 + \frac{1}{3}\lambda u_2 = f_3,$ (8)

…

Теорема 1. Если λ не равно отрицательному целому числу, то уравнение (1) имеет единственное аналитическое решение, иначе оно либо имеет бесконечное количество аналитических решений, либо не имеет аналитического решения.

Если λ не равно отрицательному целому числу, то единственное аналитическое решение

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k+1+\lambda} f_{k+1} t^k;$$

Если λ равно отрицательному целому числу и $f_{-\lambda+1} = 0$, то бесконечное количество аналитических решений

$$u(t) = \sum_{k=0, k \neq -\lambda+1}^{\infty} \frac{k+1}{k+1+\lambda} f_{k+1} t^k + \gamma t^{k-\lambda+1}, \gamma = const\,;$$

Если λ равно отрицательному целому числу и $f_{-\lambda+1} \neq 0$, то аналитических решений нет.

Таким образом, спектр уравнения(1) – это все отрицательные целые числа.

Уравнение (1) имеет общее аналитическое решение

$$u(t) = 1 + t + \gamma t^3, \gamma = const.$$

Теперьподставим (4) и (5) в (2), получаем:

$$t(a_{11}(u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) + a_{12}(v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots)) +$$

$$+\lambda \int_0^t (k_{11}(u_0 + u_1 s + u_2 s^2 + \cdots) + k_{12}(v_0 + v_1 s + v_2 s^2 + \cdots)) ds =$$

$$= f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 + \cdots$$

$$t(a_{21}(u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) + a_{22}(v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots)) +$$

$$+\lambda\int_0^t (k_{21}(u_0+u_1s+u_2s^2+\cdots)+k_{22}(v_0+v_1s+v_2s^2+\cdots))ds =$$

$$= g_1t+g_2t^2+g_3t^3+\cdots.$$

Преобразовывая,

$$a_{11}(u_0t+u_1t^2+u_2t^3+\cdots)+a_{12}(v_0t+v_1t^2+v_2t^3+\cdots)+$$

$$+\lambda\left(k_{11}\left(u_0t+\frac{1}{2}u_1t^2+\frac{1}{3}u_2t^3+\cdots\right)+k_{12}\left(v_0t+\frac{1}{2}v_1t^2+\frac{1}{3}v_2t^3+\cdots\right)\right)=$$

$$= f_1t+f_2t^2+f_3t^3+\cdots$$

$$a_{21}(u_0t+u_1t^2+u_2t^3+\cdots)+a_{22}(v_0t+v_1t^2+v_2t^3+\cdots)+$$

$$+\lambda\left(k_{21}\left(u_0t+\frac{1}{2}u_1t^2+\frac{1}{3}u_2t^3+\cdots\right)+k_{22}\left(v_0t+\frac{1}{2}v_1t^2+\frac{1}{3}v_2t^3+\cdots\right)\right)=$$

$$= g_1t+g_2t^2+g_3t^3+\cdots.$$

$$a_{11}u_0+a_{12}v_0+\lambda k_{11}u_0+\lambda k_{12}v_0=f_1;$$

$$a_{21}u_0+a_{22}v_0+\lambda k_{21}u_0+\lambda k_{22}v_0=g_1; \quad (9)$$

$$a_{11}u_1+a_{12}v_1+\frac{1}{2}\lambda k_{11}u_1+\frac{1}{2}\lambda k_{12}v_1=f_2;$$

$a_{21}u_1+a_{22}v_1+\frac{1}{2}\lambda k_{21}u_1+\frac{1}{2}\lambda k_{22}v_1=g_2$; (10)

$$a_{11}u_2+a_{12}v_2+\frac{1}{3}\lambda k_{11}u_2+\frac{1}{3}\lambda k_{12}v_2=f_3;$$

$a_{21}u_2+a_{22}v_2+\frac{1}{3}\lambda k_{21}u_2+\frac{1}{3}\lambda k_{22}v_2=g_3$;(11)

…

Систему уравнений (9) приведем к виду

$$(a_{11}+\lambda k_{11})u_0+(a_{12}+\lambda k_{12})v_0=f_1;$$

$$(a_{21}+\lambda k_{21})u_0+(a_{22}+\lambda k_{22})v_0=g_1.$$

Определитель системы

$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda k_{11} & a_{12}+\lambda k_{12} \\ a_{21}+\lambda k_{21} & a_{22}+\lambda k_{22} \end{vmatrix} = A\lambda^2+B\lambda+C,$ (12)

где

$A=k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21};\ B=a_{11}k_{22}+a_{22}k_{11}-a_{12}k_{21}-a_{21}k_{12};$

$C=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Введем обозначения: $D=B^2-4AC;$ если $D=0,$ то λ_1 – решение уравнения

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0; \quad (13)$$

если $D>0,$ то λ_1,λ_2– решения уравнения (13).

Отсюда и из структуры систем (10), (11) и следующих получаем:

Теорема 2. Если $D < 0,$ то система (2) имеет единственное аналитическое решение при любомλ*;*

Если $D = 0,$ то система (2) имеет единственное аналитическое решение при λ,не равном λ_1, умноженному на натуральное число;

Если $D > 0,$ то система (2) имеет единственное аналитическое решение при λ,не равном λ_1или λ_2, умноженным на натуральное число.

Таким образом, в этой статье выявлена общая закономерность: спектр линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с вырожденным ядром, в том числе - векторно-матричных, либо отсутствует (что может быть для систем четного порядка), либо получается из одного или нескольких значений умножением на натуральные числа.

Список использованной литературы

1. Тагаева С.Б. Регуляризация и единственность решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с особенными матричными ядрами в пространстве суммируемых функций [Текст] / С.Б. Тагаева// Научный и информационный журнал «Материаловедение» / Инновационные технологии и передовые решения: Труды I Международной межвузовской научно-практической конференции. – 2013, №1 (2). - С. 64-68.

2. Тагаева С.Б. О регуляризации и единственности решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве суммируемых функций [Текст] / С.Б. Тагаева // Вестник Казахского национального университета им. Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика, 2013. - № 3(78). - С. 87-98.

3. Тагаева С.Б. Регуляризация и единственность решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с недифференцируемыми ядрами в пространстве суммируемых функций [Текст] / С.Б. Тагаева // Известия Кыргызского национального технического университета, 2012. - № 26. - С. 217-220.

4. Tagaeva S. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics [Текст] / G. Kenenbaeva, S. Tagaeva // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014). – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. - Pp. 107-111.

5. ТагаеваС.Б. Регуляризацияинтегральныхуравнений III родаипоисксновыхявлений [Текст] / С.Б. Тагаева. – Saarbrűcken, Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 79 с.