ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ОПЕРАТОРДУ ФАКТОРИЗАЦИЯЛОНУН БИР УЧУРУ ЖОНУНДО
ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ФАКТОРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА
ON A FACTORIZATION CASE OF A SECOND-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL OPERATOR

Усенов И. А, Усенова Р.К., Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети
Усенов И. А, Усенова Р.К., КНУ им. Ж. Баласагына
I. A. Usenov, R. K. Usenova, KNU them. J. Balasagyn
Кыргызстан, Бишкек ш., Kyrgyzstan, Bishkek.. (iausen@mail.ru), (usenrk@mail.ru)

Кыргызский Национальный Унивеситет им Ж. Баласагына

Kyrgyz National University named after J. Balasagyn

Аннотация. *Бул иште Хевисайданын белгилоо ыкмасынын негизинде дифференциалдык тендемелер учун оператордук ыкма изилденген.*

Аннотация. *В данной работе исследуется операторный метод решения линейных дифференциальных уравнений на основе символического метода Хевисайда.*

Ключевые слова: символический метод Хевисайда; метод решения линейных дифференциальных уравнений.

Annotation. *In this paper we investigate the operator solution method for linear differential equations on the basis of the Heaviside symbolic method.*

Keywords: *symbolic Heaviside method; method of solving linear differential equations.*

1. Свойства линейного оператора первого порядка

Вначале изучим свойства линейного дифференциального оператора.

Для любых дифференцируемых функций $u(x)$, $v(x)$ справедливы свойства

1. $D\left(e^u v\right)=e^u\left(D+u'\right)v,\ D^2\left(e^u v\right)=e^u\left(D+u'\right)^2 v,\ldots,\ D^n\left(e^u v\right)=e^u\left(D+u'\right)^n v$,

$$D\left(e^{-u} v\right)=e^{-u}\left(D-u'\right)v,\ D^2\left(e^{-u} v\right)=e^{-u}\left(D-u'\right)^2 v,\ldots,\ D^n\left(e^{-u} v\right)=e^{-u}\left(D-u'\right)^n v, \quad (1)$$

где $D=\dfrac{d}{dx}$-оператор дифференцирования, $u'=\dfrac{du}{dx}$,

$$\left(D+u'\right)^2=\left(D+u'\right)\left(D+u'\right)=D^2+2u'D+u'^2+u'',\ \left(D+u'\right)^n=\underbrace{\left(D+u'\right),\ldots,\left(D+u'\right)}_{n-ðàç}.$$

2. Из (1) можно определить действие факторизованного оператора

$$\left(D+u'\right)v=e^{-u}D\left(e^u v\right),\ \left(D+u'\right)^2 v=e^{-u}D^2\left(e^u v\right),\ldots,\ \left(D+u'\right)^n v=e^{-u}D^n\left(e^u v\right),$$
$$\left(D-u'\right)v=e^{u}D\left(e^{-u} v\right),\ \left(D-u'\right)^2 v=e^{u}D^2\left(e^{-u} v\right),\ldots,\ \left(D-u'\right)^n v=e^{u}D^n\left(e^{-u} v\right). \quad (2)$$

2. Операторный метод решения

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=\Phi(x), \quad (3)$$

или в операторной форме

$$L(D)=\Phi, \quad (4)$$

где $L(D)=D^n+p_1(x)D^{n-1}+\ldots+p_n(x)$.

Теорема 1. (Теорема Малышева Ю.В [1].). Если линейный дифференциальный оператор $L(D)=D^n+p_1(x)D^{n-1}+\ldots+p_n(x)$ допускает факторизацию $L(D)=\prod_{j=1}^{n}\left(D+u_j'\right)$, то дифференциальное уравнение (3) интегрируется в квадратуре.

Доказательство. Применяя к уравнению (3) свойства (2), получаем эквивалентное уравнение к уравнению (3)

$$e^{-u_1}De^{u_1-u_2}...De^{u_n}y = f\ . \qquad (5)$$

Отсюда, делением на экспоненту и интегрированием, получаем

$$y = e^{-u_n}D^{-1}e^{u_1-u_2}...D^{-1}e^{u_1}f + c_1e^{-u_n}D^{-1}...D^{-1}e^{u_2-u_1} + ... + c_ne^{-u_n}, \quad (6)$$

где $D^{-1} = \int(\cdot)dx$ оператор интегрирования, первое слагаемое- частное решение неоднородного уравнения, остальные- линейно-независимые частные решения соответствующего однородного уравнения.

Теорема доказана.

3. Факторизация линейного оператора второго порядка

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = f(x), \qquad (7)$$

где $L(D) = D^2 + p_1(x)D + p_2(x)$. (8)

Пусть линейному оператору $L(D)$ соответствует некоторый факторизованный оператор

$$L(D) = D^2 + p_1(x)D + p_2(x) = (D - u'(x))(D - v'(x)), \quad (9)$$

где $u'(x)$, $v'(x)$-непрерывные дифференцируемые до второго порядка функции в некоторой области, называются элементами факторизованного оператора.
Тогда уравнение (7) запишется в виде

$$(D - u')(D - v')y = f(x). \qquad (10)$$

Используя свойства линейного оператора первого порядка уравнение (10) запишем в виде

$$e^{-u}De^{u-v}De^{v}y = f(x). \qquad (11)$$

Таким образом, задача состоит в нахождении элементов факторизованного оператора u', v' через коэффициенты уравнения (7). Для этого раскрываем, операторы в левой части уравнения (10)

$$y'' - (u' + v')y' + (u'v' - v'')y = y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y\ .$$

Полученное выражение приравниваем в левой части уравнения (7)

$$(D - u')(D - v')y = (D - u')(y' - v'y) = y'' - (u' + v')y' + (u'v' - v'')y\ .$$

Отсюда получаем систему уравнений, которой удовлетворяют элементы факторизованного оператора u', v'

$$\begin{cases} u' + v' = -p_1(x), \\ u'v' - v'' = p_2(x). \end{cases} \qquad (12)$$

Пример:

$$y''(x) - 3tgxy' - 2y = 0\,.$$

Через систему (12) методом подбора определяем, что $u' = tgx,\ v' = 2tgx$.Тогда дифференциальный оператор $L(D) = D^2 - 3tgxD - 2$ факторизуется $D^2 - 3tgxD - 2 = (D - tgx)(D - 2tgx)$. Следовательно, исходное уравнение запишется

$$(D - tgx)(D - 2tgx)y = 0$$

Используя свойства линейного оператора первого порядка, уравнение запишем в виде

$$e^{-\ln\cos x}De^{\ln\cos x - 2\ln\cos x}De^{2\ln\cos x}y = 0 \ \text{ или } \ \frac{1}{\cos x}D\frac{1}{\cos x}D\cos^2 xy = 0$$

где $u = -\ln|\cos x|,\ v = -2\ln|\cos x|$.

Дважды применяя, обратный оператор D^{-1}, получаем общие решения исходного уравнения

$$y(x) = \frac{c_1 \sin x}{\cos^2 x} + \frac{c_2}{\cos^2 x}.$$

4. Достаточное условие факторизации линейного оператора второго порядка

При факторизации линейного дифференциального оператора проблема состоит в том, что один из элементов факторизованного оператора является решением уравнения Рикатти.

Действительно: Если

$$\begin{cases} u' = -p_1(x) - v' \\ v'' + p_1(x)v = -v'^2 - p_2(x). \end{cases} \Rightarrow v' = z \Rightarrow z' + p_1(x)z = -z^2 - p_2(x). \quad (13)$$

В работе [2] относительно уравнения Рикатти доказана теорема:

Теорема 2. Пусть свободный член $q(x)$ и коэффициенты $a(x), b(x)$ в уравнении $z' + a(x)z = b(x)z^2 + q(x)$ связаны соотношением $q(x) = -\dfrac{a(x)}{\int b(x)dx}$. Тогда уравнение Рикатти с подстановкой $z = \dfrac{1}{w - \int b(x)dx}$ сводится к уравнению Бернулли.

Используя утверждение данной теоремы, доказывается следующая теорема

Теорема 3. Пусть коэффициенты $p_1(x), p_2(x)$ в уравнение (7) связаны соотношением $\dfrac{p_2(x)}{p_1(x)} = -\dfrac{1}{x}$. Тогда линейный дифференциальный оператор $L(D)$ второго порядка факторизуется.

Доказательство: При условии теоремы уравнение (13) запишется в виде

$$z' + p_1(x)z = -z^2 + \frac{p_1(x)}{x}. \quad (14)$$

Для полученного уравнения выполняется условие теоремы 2, т.е.

$$\frac{p_1(x)}{x} = -\frac{p_1(x)}{-\int dx}.$$

Тогда с подстановкой $z = \dfrac{1}{w + x}$ уравнение (14) сводится к уравнению

$$z' + p_1(x)z = -\frac{p_1(x)}{x} z^2.$$

Следовательно, уравнение (14) интегрируется в квадратуре.

Теорема доказано.

Пример: Рассмотрим уравнение второго порядка с переменным коэффициентом

$$y'' + \cos x y' - \frac{\cos x}{x} y = 0.$$

Проверяем достаточное условие факторизации, где $p_1(x) = \cos x$, $p_2(x) = -\dfrac{\cos x}{x}$, то

$$\frac{p_2(x)}{p_1(x)} = \frac{-\cos x / x}{\cos x} = -\frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{1}{x}.$$

Следовательно, имеем уравнение Рикатти в виде

$z' + \cos x z = -z^2 + \dfrac{\cos x}{x}$, где $z = \dfrac{1}{x}$ является решением. Тогда из (13) имеем элементы факторизованного оператора $u' = -\cos x - \dfrac{1}{x}$, $v' = \dfrac{1}{x}$. Таким образом, дифференциальный оператор $L(D) = D^2 + \cos x D - \frac{\cos x}{x}$ факторизуется $D^2 + \cos x D - \frac{\cos x}{x} = \left(D + \cos x + \frac{1}{x}\right)\left(D - \frac{1}{x}\right)$.

Литература.

1. Ю.В. Малышев. Дифференциальные уравнения(операторный метод)// Вестник Самарского гос.тех.ун-та . сер. физ.-мат. наук, №6 стр. 5-10., 2006 г.
2. И.А. Усенов , Р.К. Усенова. Случаи интегрируемости некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений в квадратуре // Вестник КНУ им.Ж.Баласагына «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» Бишкек2007. Серия 3. Выпуск 4. стр.52-56.